Sitzungsber Abt. II (1998) 207: 23–34

Sitzungsberichte
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Abt. II
Mathematische, Physikalische und Technische Wissenschaften

Eigenwertprobleme mit Differentialgleichungen vierter Ordnung für die Orthogonalpolynome vom Laguerretyp, Legendretyp und Jacobityp

Von

P. A. Lesky

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 22. Jänner 1998
durch das w. M. Leopold Vietoris)

1. Einleitung

In den Arbeiten [4] (1938) und [5] (1940) hat H. L. Krall über Momentendeterminanten alle möglichen Fälle für Orthogonalpolynome, die Lösungen von Eigenwertproblemen mit linearen homogenen Differentialgleichungen vierter Ordnung sind, angegeben. Dabei entstanden Differentialgleichungen vierter Ordnung für die klassischen Orthogonalpolynome und für drei weitere Fälle, die von A. H. Krall in [3] (1981) als Laguerretyp, Legendretyp und Jacobityp bezeichnet wurden. Schon H. L. Krall hat in seinen Arbeiten gezeigt, daß in den drei letzten Typen Gewichtsfunktionen mit Unstetigkeiten in den endlichen Endpunkten der Orthogonalitätsintervalle auftreten. Wahrscheinlich handelt es sich dabei um die ersten Polynomtypen, die im Sinne eines "gemischten" Skalarproduktes orthogonal sind.

In einer vorangehenden Arbeit [7] wurden die Differentialgleichungen vierter Ordnung für die klassischen Orthogonalpolynome auf eine von H. L. Krall verschiedene Art gewonnen. Dabei sollten insbesondere die endlichen klassischen Orthogonalsysteme (Romanovski – Jacobi, Roma-

novski – Bessel und Romanovski – Pseudojacobi) Berücksichtigung finden. Hier folgen die Orthogonalpolynome vom Laguerretyp, Legendretyp und Jacobityp. Über die Arbeit von A. H. Krall [3] hinausgehend werden unter Verwendung des Satzes von Favard ([1], [6]) *alle möglichen positiv definiten* (unendlichen und endlichen) *Orthogonalsysteme*, die aus den entsprechenden Differentialgleichungen vierter Ordnung hervorgehen, angegeben. Dabei zeigt sich, daß die dreigliedrigen Rekursionsformeln für die monischen Polynome vom Jacobityp wesentlich einfacher als in [3] ausfallen. Außerdem können Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Polynome vom Laguerretyp, Legendretyp und Jacobityp angegeben werden. Deren Berechnung danke ich Herrn W. Koepf (Zuse-Zentrum, Berlin-Dahlem).

2. Differentialgleichungen, Polynomdarstellungen, dreigliedrige Rekursionen

2.1. Laguerretyp

Für die Polynome vom *Laguerretyp* entnimmt man [5] die Differentialgleichung vierter Ordnung

$$x^2 y_n^{IV} + 2x(x+2)y_n''' + x(x+v+4)y_n'' + (vx+v-2)y_n' = \lambda_n y_n \tag{2.1.1}$$

($n = 0, 1, 2, \ldots$; y_n sind Polynome vom n-ten Grad in x; v ist ein reeller Parameter; λ_n sind die Eigenwerte).
Der Ansatz

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} x^k \quad (a_{n,n} \neq 0) \tag{2.1.2}$$

liefert die Eigenwerte

$$\lambda_n = n(n+v-1) \tag{2.1.3}$$

und die dreigliedrige Koeffizientenrekursion

$$\begin{aligned}(n-k)(n+k+v-1)a_{n,k} = {} & (k+1)[(2k+v)(k+1)-2]a_{n,k+1} \\ & + k(k+1)(k+2)(k+3)a_{n,k+2}\end{aligned}$$

($k = n-1, n-2, \ldots; a_{n,n+1} = 0$). Daraus ergibt sich

$$a_{n,n-j} = \frac{n^2(n-1)^2 \quad (n-j+1)^2}{j!}\left[1 - \frac{2j}{(n-j+1)(v+2n-2)}\right] a_{n,n}$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots$ und $j = 1, 2, \quad , n$, wenn $v \neq -2n + 2$ vorausgesetzt wird. Damit entstehen für (2.1.1) die (monischen) Polynomlösungen

$$y_n(x) = x^n {}_2F_0\left(\begin{matrix}-n, -n \\ ---\end{matrix}; \frac{1}{x}\right) - \frac{2nx^{n-1}}{v + 2n - 2} {}_2F_0\left(\begin{matrix}-n, 1-n \\ ---\end{matrix}; \frac{1}{x}\right)$$
$$= \left[x^n - \frac{2nx^{n-1}}{v + 2n - 2}\right] {}_3F_1\left(\begin{matrix}-n, -n, & \frac{1}{2}vx + nx - x - n + 1 \\ & \frac{1}{2}vx + nx - x - n\end{matrix}; \frac{1}{x}\right) \tag{2.1.4}$$

($n = 1, 2, 3, \ldots; v \neq -2n + 2; a_{n,n} = 1$; *Laguerretyp*).

Für die monischen Polynomlösungen (2.1.4) von (2.1.1) findet man neben $y_0(x) = 1$ und $y_1(x) = x - c_0$ mit $c_0 = \frac{2}{v} - 1$ die dreigliedrige Rekursion

$$y_{n+1}(x) = (x - c_n)y_n(x) - d_n y_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.1.5}$$

mit

$$c_n = \frac{2(v-2)}{(v + 2n - 2)(v + 2n)} - 2n - 1, \quad d_n = \frac{n^2(v + 2n - 4)(v + 2n)}{(v + 2n - 2)^2}. \tag{2.1.6}$$

Die Differentialgleichung (2.1.1) geht nach Multiplikation mit einer zweimal differenzierbaren Funktion w in die selbstadjungierte Form

$$(wx^2y_n'')'' + \{[wx(x + v + 4) - (wx^2)'']y_n'\}' = n(n + v - 1)wy_n$$

über, wenn für w die Differentialgleichungen

$$2(wx^2)' = 2wx(x + 2) \quad \text{und} \quad [wx(x + v + 4)]' - (wx^2)''' = w(vx + v - 2)$$

gelten. Daraus entsteht $w = e^x$, und man erhält zu (2.1.1) die selbstadjungierte Form

$$(x^2e^xy_n'')'' + [(vx - 2)e^xy_n']' = n(n + v - 1)e^xy_n. \tag{2.1.7}$$

Mit Hilfe Zeilberger-artiger Algorithmen ergibt sich für die Polynome $y_n(x)$ aus (2.1.4) die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$x[(v + 2n)(v + 2n - 2)x + 2(v - 2)]y_n'' + [(v + 2n)(v + 2n - 2)x(x + 1) + 2(v - 2)(x + 2)]y_n'$$
$$= [(v + 2n)(v + 2n - 2)x(x + 1) + 4(v + n - 1)]y_n \tag{2.1.8}$$

($n = 0, 1, 2, \quad .$), in der alle Koeffizienten von n abhängen.

2.2. Legendretyp

Für die Polynome vom *Legendretyp* entnimmt man [2], [4] und [5] die Differentialgleichung vierter Ordnung

$$\begin{aligned}(x^2-1)^2 y_n^{IV} &+ 8x(x^2-1)y_n''' \\ &+ 4(t+3)(x^2-1)y_n'' + 8txy_n' = \lambda_n y_n\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

($n = 0, 1, 2, \ldots$; y_n sind Polynome vom n-ten Grad in x; t ist ein reeller Parameter; λ_n sind die Eigenwerte).

Der Ansatz (2.1.2) liefert die Eigenwerte

$$\lambda_n = n(n+1)[n(n+1) + 2(2t-1)] \tag{2.2.2}$$

und die dreigliedrige Koeffizientenrekursion

$$\begin{aligned}&(n-k)(n-k+1)[n(n+1) + k(k+1) + 2(2t-1)]a_{n,k} \\ &= -2(k+1)(k+2)[k(k+3) + 2(t+3)]a_{n,k+2} + (k+1) \\ &\quad (k+2)(k+3)(k+4)a_{n,k+4}\end{aligned}$$

($k = n-2, n-4, \ldots; a_{n,n+2} = 0$). Daraus ergibt sich

$$a_{n,n-2j} = \frac{(-1)^j n(n-1) \quad (n-2j+1)[2t + n(n-1) + 4j]}{j!\, 2^j (2n-1)(2n-3) \quad (2n-2j+1)[2t + n(n-1)]} a_{n,n}$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots$ und $j = 1, 2, \ldots, n$, wenn $2t \neq -n(n-1)$ vorausgesetzt wird. Damit entstehen für (2.2.1) die (monischen) Polynomlösungen

$$y_n(x) = x^n {}_3F_2\left(\begin{matrix}-\frac{n}{2}, & \frac{1-n}{2}, & \frac{1}{4}[2t + n(n-1)] + 1 \\ & -n+\frac{1}{2}, & \frac{1}{4}[2t + n(n-1)]\end{matrix}; \frac{1}{x^2}\right) \tag{2.2.3}$$

($n = 1, 2, 3, \ldots; 2t \neq -n(n-1); a_{n,n} = 1$; *Legendretyp*); es handelt sich um *symmetrische* Polynome.

Für die monischen Polynomlösungen (2.2.3) von (2.2.1) findet man neben $y_0(x) = 1$ und $y_1(x) = x$ die dreigliedrige Rekursion (2.1.5) mit $c_0 = 0$ und

$$c_n = 0, \quad d_n = \frac{n^2[2t + (n-1)(n-2)][2t + (n+1)(n+2)]}{(2n-1)(2n+1)[2t + n(n-1)][2t + n(n+1)]} \tag{2.2.4}$$

($n = 1, 2, 3, \ldots$).

Die Differentialgleichung (2.2.1) geht nach Multiplikation mit einer zweimal differenzierbaren Funktion w in die selbstadjungierte Form

$$\begin{aligned}[w(x^2-1)^2 y_n'']'' + \left[\{4w(t+3)(x^2-1) - [w(x^2-1)^2]''\} y_n'\right]' \\ = n(n+1)[n(n+1) + 2(2t-1)]\, y_n\end{aligned}$$

über, wenn für w die Differentialgleichungen

$$2[w(x^2-1)^2]' = 8\,wx(x^2-1)$$

und

$$[4w(t+3)\,(x^2-1)]' - [w(x^2-1)^2]''' = 8\,wtx$$

gelten. Daraus entsteht $w = 1$, und man erhält zu (2.2.1) die selbstadjungierte Form

$$[(x^2-1)^2 y_n'']'' + [4(tx^2-t-2)y_n']' = n(n+1)[n(n+1) + 2(2t-1)]\,y_n. \tag{2.2.5}$$

Hier ergibt sich für die Polynome $y_n(x)$ aus (2.2.3) die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}&(x^2-1)\{4(x^2-1)(n-1)(n+2)[n(n+1)+4t]\\ &+16t[(t+3)x^2-t-1]\}y_n'' + 2x\{4(x^2-1)(n-1)(n+2)[n(n+1)\\ &\quad +4t] + 16t[(t+3)x^2-t+1]\}\,y_n' = n(n+1)\{4(x^2-1)(n-1)\\ &\qquad (n+2)[n(n+1)+4t]\\ &\quad +16(n-1)(n+2) + 16t[(t+3)x^2-t+1]\}y_n\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

$(n = 0, 1, 2, \ldots)$, in der alle Koeffizienten von n abhängen.

2.3. Jacobityp

Für die Polynome vom *Jacobityp* entnimmt man [5] (in [3] berichtigt) die Differentialgleichung vierter Ordnung

$$\begin{aligned}&(x^2-x)^2 y_n^{IV} + 2(x^2-x)[(r+2)x-2]\,y_n''' + rx[(r+f+3)x\\ &\quad -f-4]\,y_n'' + r[(fr-2)x-f+2]\,y_n' = \lambda_n y_n\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

$(n = 0, 1, 2, \ldots; y_n$ sind Polynome vom n-ten Grad in $x; f$ und r sind reelle Parameter; λ_n sind die Eigenwerte).

Der Ansatz (2.1.2) liefert die Eigenwerte

$$\lambda_n = n(n+r-1)[n(n+r-1) + r(f-1) - 2] \tag{2.3.2}$$

und die dreigliedrige Koeffizientenrekursion

$$\begin{aligned}&(n-k)(n+k+r-1)[(n+k+1)(n+r-2) + r(f-2)\\ &- k(n-k-1)]a_{n,k} = -(k+1)[2k(k+2)(r+k-1)\\ &+ r(f-2)(k+1)]a_{n,k+1} + k(k+1)(k+2)(k+3)a_{n,k+2}\end{aligned}$$

($k = n-1, n-2, \ldots; a_{n,n+1} = 0$). Daraus ergibt sich

$$a_{n,n-j} = \frac{(-1)^j n(n-1) \quad (n-j+1)(n+1)n \ldots (n-j+2)}{j!(n+1)(2n+r-2)(2n+r-3) \quad (2n+r-j-1)} \left[n-j+1-\frac{2j(n+r-2)}{2n(n+r-2)+r(f-2)}\right] a_{n,n} \tag{2.3.3}$$

für $n = 1, 2, 3, .$ und $j = 1, 2, \ldots, n$, wenn $r \neq 2-2n, 3-2n, .$ und $r(f-2) \neq -2n(n+r-2)$ vorausgesetzt werden. Unter Verwendung der Abkürzungen

$$s = r(f-2) \quad \text{und} \quad u = 2(n+1)(n+r-2)$$

entstehen dann für (2.3.1) die (monischen) Polynomlösungen

$$\begin{aligned} y_n(x) &= x^n {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, -n \\ 2-r-2n \end{matrix}; \frac{1}{x}\right) \\ &\quad + \frac{2n(n+r-2)x^{n-1}}{(2n+r-2)[2n(n+r-2)+s]} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, 1-n \\ 3-r-2n \end{matrix}; \frac{1}{x}\right) \\ &= x^n {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, -1-n, & \dfrac{-ns-(n-1)u}{s+u} \\ -2-r-2n, & \dfrac{-(n+1)s-nu}{s+u} \end{matrix}; \frac{1}{x}\right) \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

($n = 1, 2, 3, ..$; $r \neq 2-2n, 3-2n, ..$ und $s \neq -2n(n+r-2)$; $a_{n,n} = 1$; *Jacobityp*). Für die monischen Polynomlösungen (2.3.4) von (2.3.1) findet man neben $y_0(x) = 1$ und $y_1(x) = x - c_0 (c_0 = \frac{s}{r(s+2r-2)})$ die dreigliedrige Rekursion (2.1.5) mit

$$c_n = \frac{\alpha s^2 + 8n(n+1)(n+r-1)(n+r-2)s + 4n(n+1)(n+r-1)(n+r-2)\beta}{(2n+r)(2n+r-2)[2n(n+r-2)+s]\,[2(n+1)(n+r-1)+s]} \tag{2.3.5}$$

($\alpha = 2(n^2-n-1)+(2n+1)r, \quad \beta = 2n(n-1)+(2n+1)r$) und

$$d_n = \frac{n^2(n+r-2)^2[2(n-1)(n+r-3)+s][2(n+1)(n+r-1)+s]}{(2n+r-3)(2n+r-2)^2(2n+r-1)[2n(n+r-2)+s]^2} \tag{2.3.6}$$

($n = 1, 2, 3, \ldots$).

Die Differentialgleichung (2.3.1) geht nach Multiplikation mit einer zweimal differenzierbaren Funktion w in die selbstadjungierte Form

$$[w(x^2-x)^2y_n'']''+[\{wrx[(r+f+3)x-f-4] \\ -[w(x^2-x)^2]''\}y_n']'=\lambda_n w y_n$$

über, wenn für w die Differentialgleichungen

$$2[w(x^2-x)^2]'=2w(x^2-x)[(r+2)x-2]$$

und

$$\{wrx[(r+f+3)x-f-4]\}'-[w(x^2-x)^2]''' \\ =wr[(rf-2)x-f+2]$$

gelten. Daraus entsteht $w=(1-x)^{r-2}$ $(0\le x<1)$, und man erhält zu (2.3.1) die selbstadjungierte Form

$$[x^2(1-x)^r y_n'']''+[\{rx(1-x)^{r-2}[(r+f+3)x-f-4] \\ -[x^2(1-x)^r]''\}y_n']'=n(n+r-1)[n(n+r-1)+r(f-2) \\ +r-2](1-x)^{r-2}y_n. \tag{2.3.7}$$

Für die Polynome $y_n(x)$ aus (2.3.4) ergibt sich die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(x^2-x)[4xn(n-1)(n+r+1)(n+r-2)+xr(rf-2)(4n+f-2) \\ -2r(f-2)]y_n''+\{4(1-rx)[xn(n-1)(n+r+1)(n+r-2) \\ +xrfn(n-1)+xrn(rf-2)-r(f-2)]-xr(f-2)[x(rf-2) \\ -f+2]\}y_n'=n(n+r-1)[4xn(n-1)(n+r+1)(n+r-2) \\ +xr(rf-2)(4n+f-2)-4(n+1)(n+2)-4r(n+f-1)]y_n \tag{2.3.8}$$

$(n=0,1,2,\ldots)$, in der alle Koeffizienten von n abhängen.

3. Orthogonalität

Die Orthogonalitätsfunktionale zu den Polynomlösungen $y_n(x)$ von (2.1.1), (2.2.1) und (2.3.1) können wegen des Vorliegens dreigliedriger Rekursionen mit Hilfe des Satzes von Favard ([1], [6]) ermittelt werden.

Der Satz von Favard besagt folgendes: Für die aus den dreigliedrigen Rekursionen (2.1.5) hervorgehenden (monischen) Polynome $y_n(x)$ existiert genau dann
a) ein quasidefinites Orthogonalitätsfunktional L, wenn die d_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ aus (2.1.5) von null verschieden sind;
b) ein positiv definites Orthogonalitätsfunktional L, wenn die c_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ reell und die d_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ aus (2.1.5) positiv sind.

Nach Festlegung von $L[1] = d_0$ gilt dann

$$L[y_n, y_m] = d_0\, d_1 \ldots d_n \delta_{n,m} \tag{3.1}$$

$(n, m = 0, 1, 2, \ldots;\ \delta_{n,m}$ ist das Kroneckersymbol; bei a) muß $d_0 \neq 0$ und bei b) $d_0 > 0$ festgelegt werden).
Die Berechnung des Funktionals L erfolgt mit Hilfe von $L[y_n] = 0$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ Endliche Orthogonalsysteme lassen sich im Sinne von [6] ermitteln.

3.1. Laguerretyp

Durch Aufschichtung der d_n aus (2.1.6) entsteht

$$d_1 d_2 \ldots d_n = \frac{n!\,n!(v-2)(v+2n)}{v(v+2n-2)} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

wozu man im Hinblick auf die unten angegebene Realisierung

$$(d_0 =)\ L[1] = \frac{v}{v-2}$$

festlegen kann. Damit ergibt sich formal für die *Laguerretyp*-Polynome

$$L[y_n, y_m] = \frac{n!\,n!(v+2n)}{v+2n-2}\delta_{n,m} \quad (n, m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.1.1}$$

Dazu bestehen folgende Möglichkeiten für Orthogonalität:
a) Für Orthogonalität im *quasidefiniten* Sinn braucht man $d_n \neq 0$, also

$$v \neq 4 - 2n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3.1.2}$$

b) Für Orthogonalität im *positiv definiten* Sinn braucht man bei einem *unendlichen Orthogonalsystem* $d_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $v > 2$.
c) Für Orthogonalität im *positiv definiten* Sinn braucht man für ein *endliches Orthogonalsystem* mit $N + 1$ Polynomen $(N \in \mathbb{N}) d_n > 0$ für $n = 1, 2, \ldots, N$, also

$$v = -2N - \rho \quad \text{mit} \quad 0 < \rho < 2. \tag{3.1.3}$$

Eine Realisierung des Orthogonalitätsfunktionals L ist bereits bei H. L. Krall in [4] zu finden:

$$L[x^n] = \int_{-\infty}^{0} x^n \, d\psi(x) = \begin{cases} (-1)^n n! & \text{für} \quad n \in \mathbb{N}, \\ \frac{\nu}{\nu-2} & \text{für} \quad n = 0, \end{cases}$$
$$\text{mit } \psi(x) = \begin{cases} \frac{\nu}{\nu-2} & \text{für} \quad x = 0, \\ e^x & \text{für} \quad -\infty < x < 0. \end{cases} \qquad (3.1.4)$$

Mit diesen $L[x^n]$ ergibt sich für die Laguerretyp-Polynome tatsächlich $L[y_n] = 0$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ Für entsprechend meßbare Funktionen g und h läßt sich (3.1.4) das *Skalarprodukt*

$$\langle g, h \rangle = \int_{-\infty}^{0} e^x g(x) \overline{h(x)} \, dx + \frac{2}{\nu - 2} g(0) \overline{h(0)} \qquad (3.1.5)$$

(Überstreichung bedeutet konjugiert komplex) überordnen.

3.2. Legendretyp

Durch Aufschichtung der d_n aus (2.2.4) entsteht

$$d_1 d_2 \ldots d_n = \frac{1^2 . 2^2 . 3^2 \ldots n^2 t[2t + (n+1)(n+2)]}{1^2 . 3^2 . 5^2 \quad (2n-1)^2 (2n+1)(t+1)[2t + n(n-1)]}$$

$(n = 1, 2, 3 \ldots)$, wozu man in Hinblick auf die unten angegebene Realisierung

$$(d_0 =) \; L[1] = 2$$

festlegen kann. Damit ergibt sich formal für die *Legendretyp*-Polynome

$$L[y_n, y_m] = \frac{2 n! n! t[2t + (n+1)(n+2)]}{1.3.3.5.5 \ldots (2n-1)(2n-1)(2n+1)(t+1)[2t + n(n-1)]} \qquad (3.2.1)$$

$(n, m = 0, 1, 2, \ldots)$. Dazu bestehen folgende Möglichkeiten für Orthogonalität:

a) Für Orthogonalität im *quasidefiniten* Sinn braucht man $d_n \neq 0$, also

$$2t \neq -n(n-1) \quad (n = 1, 2, 3, . \; .). \qquad (3.2.2)$$

b) Für Orthogonalität im *positiv definiten* Sinn braucht man bei einem *unendlichen Orthogonalsystem* $d_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $t > 0$.

c) Für Orthogonalität im *positiv definiten* Sinn braucht man für ein *endliches Orthogonalsystem* mit $N+1$ Polynomen $(N \in \mathbb{N}) d_n > 0$ für $n = 1, 2, \ldots, N$, also

$$2t = -N(N-1) - \rho \quad \text{mit} \quad 0 < \rho < 2N. \tag{3.2.3}$$

Eine Realisierung des Orthogonalitätsfunktionals L ist bereits bei H. L. Krall in [3] zu finden:

$$L[x^n] = \int_{-1}^{1} x^n \, d\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{2(t+n+1)}{(t+1)(2n+1)} & \text{für} \quad n = 0, 2, 4, \ldots, \\ 0 & \text{für} \quad n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases} \tag{3.2.4}$$

mit

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x = 1, \\ \dfrac{tx}{t+1} & \text{für} \quad -1 < x < 1, \\ -1 & \text{für} \quad x = -1. \end{cases} \tag{3.2.5}$$

Mit diesen $L[x^n]$ ergibt sich für die Legendretyp-Polynome $y_n(x)$ tatsächlich $L[y_n] = 0$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Für entsprechend meßbare Funktionen g und h läßt sich (3.2.4) und (3.2.5) das *Skalarprodukt*

$$\langle g, h \rangle = \frac{t}{t+1} \int_{-1}^{1} g(x)\overline{h(x)} \, dx + \frac{g(1)\overline{h(1)}}{t+1} + \frac{g(-1)\overline{h(-1)}}{t+1}$$

überordnen.

3.3. Jacobityp

Durch Aufschichtung der d_n aus (2.3.6) entsteht

$$d_1 d_2 \ldots d_n = \frac{(n!)^2 (r-1)s[2(n+1)(n+r-1)+s]}{(n+r-1)^2 (n+r)^2 \quad (2n+r-2)^2 (2n+r-1)[2(r-1)+s][2n(n+r-2)+s]}$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$, wozu man in Hinblick auf die unten angegebene Realisierung

$$(d_0 =) \; L[1] = \frac{rf-2}{r(r-1)(f-2)}$$

festlegen kann. Damit ergibt sich formal für die *Jacobityp*-Polynome

$$L[y_n, y_m] = \frac{(n!)^2(rf-2)[2(n+1)(n+r-1)+s]\delta_{n,m}}{(n+r-1)^2(n+r)^2 \quad (2n+r-2)^2(2n+r-1)[2(r-1)+s][2n(r+n-2)+s]} \tag{3.3.1}$$

$(n, m = 0, 1, 2, \ldots)$. Dazu bestehen folgende Möglichkeiten für Orthogonalität:

a) Für Orthogonalität im *quasidefiniten* Sinn braucht man $d_n \neq 0$, also

$$r \neq 2-n \quad \text{und} \quad s \neq -2(n-1)(n+r-3) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3.3.2}$$

b) Für Orthogonalität im *positiv definiten* Sinn braucht man bei einem *unendlichen Orthogonalsystem* $d_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $r > 1$ und $s > 0$ $(f > 2)$.

c) Für Orthogonalität im *positiv definiten* Sinn braucht man für ein *endliches Orthogonalsystem* mit $N+1$ Polynomen $d_n > 0$ für $n = 1, 2, \ldots, N$, also etwa

$$\begin{aligned} &c.1)\ r > 1 \quad \text{und} \quad -2(N+2)(N+r) < s < \\ &-2(N+1)(N+r-1); \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

wegen (3.3.3) entsteht $f < 2$ und $rf < 2$, also $d_0 > 0$.

Eine Realisierung des Orthogonalitätsfunktionals L ist bei H. L. Krall in [4] und bei A. M. Krall in [3] zu finden:

$$\begin{aligned} L[x^n] &= \int_0^1 x^n(1-x)^{r-2}\, d\psi(x) \\ &= \begin{cases} \dfrac{n!}{(r-1)r \quad (n+r-1)} & \text{für} \quad n \in \mathbb{N}, \\ \dfrac{rf-2}{r(r-1)(f-2)} & \text{für} \quad n = 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

mit

$$\psi(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 < x \leq 1, \\ \dfrac{-2}{r(f-2)} & \text{für} \quad x = 0; \end{cases} \tag{3.3.5}$$

dabei wird $r > 1$ benötigt und wegen (3.3.2) ist kein Nenner null. Mit diesen $L[x^n]$ ergibt sich für die Jacobityp-Polynome $y_n(x)$ tatsächlich $L[y_n] = 0$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Für entsprechend meßbare Funktionen g

und h läßt sich (3.3.4) und (3.3.5) das Skalarprodukt

$$\langle g, h \rangle = \int_0^1 (1-x)^{r-2} g(x)\,\overline{h(x)}\,dx + \frac{2}{r(f-2)}\, g(0)\,\overline{h(0)} \qquad (3.3.6)$$

überordnen. Auch darin ist wegen (3.3.2) der Nenner von Null verschieden. Die Orthogonalität im *positiv definiten* Sinn für ein *endliches Orthogonalsystem* mit $N+1$ Polynomen ($N \in \mathbb{N}$) kann auch durch

$$c.2)\ -2N-1 < r < -2N+1 \quad \text{mit} \quad s < 0 \quad \text{oder}$$
$$-2(N+1)(N+r-1) < s \qquad (3.3.7)$$

erreicht werden. Wegen des negativen r wird in (3.3.4) – (3.3.6) r durch $-r$ ersetzt. Das neue

$$(d_0 =)\ L[1] = \frac{rf+2}{r(r+1)(2-f)}$$

enthält wegen $r < -1$ bei $s < 0$ einen negativen Zähler und Nenner, bei $-2(N+1)(N+r-1) < s$ einen positiven Zähler und Nenner. Damit ist d_0 in beiden Fällen positiv.

Literatur

[1] Chihara, T. S.: An Introduction to orthogonal polynomials. New York: Gordon and Breach 1968.

[2] Everitt, W. N., Littlejohn, L. L.: Differential operators and the Legendretyp polynomials. Diff. Int. Eq. **1**, 97–116 (1988).

[3] Krall, A.M.: Orthogonal polynomials satisfying fourth order differential equations. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sec. A **87**, 271–288 (1981).

[4] Krall, H. L.: Certain differential equations for Tchebycheff polynomials. Duke Math. J. **4**, 705–718 (1938).

[5] Krall, H. L.: On orthogonal polynomials satisfying a certain fourth order differential equation. Pennsyl. State Coll. Bull. **34**, 3–24 (1940).

[6] Lesky, P.: Der Satz von Favard für endliche Orthogonalsysteme. Sb. Öst. Akad. Wiss. math. nat. Kl. **4**, 45–49 (1986).

[7] Lesky, P. A.: Eigenwertprobleme mit Differentialgleichungen vierter Ordnung für die kontinuierlichen klassischen Orthogonalpolynome. Sb. Öst. Akad. Wiss. math. nat. Kl. Abt. **II 206**, 127–139 (1997).

Anschrift des Verfassers: Univ. Prof. Dr. Peter A. Lesky, Mathematisches Institut A der Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 57, D-70569 Stuttgart.